

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

3-дәріс. Жиындар теориясы

Дәрістің мақсаты – жиынның анықтамасын білу, жиындардың арасында амалдар қолдана білу

Негізгі сұрақтар:

1. Жиын. Ішкі жиын. Бос жиын
2. Жиындардың бірігуі мен қиылысуы
3. Де Морган заңдары
4. Натурал сандар жиыны. Рационал сандар жиыны. Нақты сандар жиыны.

1.1 Жиындар. Нақты сандар және олардың қасиеттері

Математиканың негізгі ұғымдарының бірі – **жиын** ұғымы. Жиынды математикалық анықтама арқылы толық беру мүмкін емес, сондықтан оны сөздермен және мысалдар арқылы түсіндіруге болады.

Жиын деп қандай да бір белгілеріне қарай біріктірілген түрлі заттардың (объектілердің) тобын айтады. Мысалы, аудиториядағы студенттер жиыны, кітапханада кітаптар жиыны, теңдеудің түбірлер жиыны, бүтін сандар жиыны және т.б. Жиынды құрайтын заттарды оның **элементтері** деп атайды.

Әдетте жиынды үлкен латын әріптерімен $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ белгілейді, ал оның элементтерін кіші латын әріптерімен $a, b, c, \dots, x, y, z$ арқылы белгілейді.

Бос жиын деп бірде-бір элементі болмайтын жиынды атайды, оны $\emptyset$ деп белгілейді. Мысалы, $x^2 + 1 = 0$ теңдеуінің нақты түбірлері жоқ болғандықтан, нақты сандар жиынының бұл теңдеудің түбірлері бос жиын болады.

Бос жиын кез келген жиынның **жиыншасы** болады.

Егер A жиынының әрбір элементі B жиынында жатса, онда A жиынын B жиынының **ішкі жиыны** (жиыншасы) деп атайды және $A \subset B$ деп белгілейді.

Егер A және B жиындары үшін $A \subset B$ және $B \subset A$ орындалса, яғни A жиынының кез келген элементі

B жиынында жатса және керісінше, B жиынының кез келген элементі A жиынында жатса, онда A және B жиындарын **тең** деп атайды және $A = B$ деп белгілейді.

Мысалы, $A = \{2, 3\}$ жиыны және $x^2 - 5x + 6 = 0$ теңдеудің түбірлер жиыны B берілсе, онда $A = B$.

Егер a саны A жиынының элементі болса, онда $a \in A$ деп белгілейміз, ал егер a саны A жиынының элементі болмаса, онда $a \notin A$ немесе $a \in \bar{A}$ деп белгілейміз.

A және B жиындарының бірігуі (қосындысы) деп әрқайсы осы жиындардың ең болмағанда біреуінде жататын барлық элементтер жиынын айтады, оны былай белгілейміз: $A \cup B$.

Мысалы, егер

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5\},$$

онда олардың бірігуі

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Ескерту және нақты сандардың қасиеттері

Ескерту. Жиындарды қосқанда олардың ортақ элементтері қосындыға бір рет қана кіреді.

Айырма. A жиынының B жиынына енбейтін элементтер жиынын A мен B жиындарының **айырымы** деп атайды және оны

$$A \setminus B \quad \text{немесе} \quad A - B$$

деп белгілейді.

Қиылысу. A және B жиындарының **қиылысуы** деп A мен B жиындарының екеуінде де жататын барлық элементтер жиынын айтады, оны былай белгілейміз:

$$A \cap B.$$

Мысалы, жұп сандар жиыны мен тақ сандар жиынының қиылысуы бос жиын:

$$\{\text{жұп сандар}\} \cap \{\text{тақ сандар}\} = \emptyset.$$

Рационал сандар. Рационал сан деп екі бүтін санның қатынасын m/n , $n \neq 0$ (немесе $m : n$, $n \neq 0$) айтады. Рационал сандар жиынын $Q = \{m/n\}$ деп белгілейді.

Рационал санды шекті ондық бөлшек түрінде немесе шексіз периодты ондық бөлшек түрінде жазуға болады.

Натурал және бүтін сандар. Натурал сандар жиыны N , бүтін сандар жиыны Z , рационал сандар жиыны Q арасында келесі қатынастар бар:

$$N \subset Z, \quad Z \subset Q, \quad N \subset Q.$$

Иррационал сандар. Иррационал сан деп кез келген периодсыз шексіз ондық бөлшекті айтады, оны

$$a = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \dots$$

түрінде жазады, мұндағы α_0 – бүтін сан, $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Иррационал сандар жиынын I деп белгілейміз.

Рационал және иррационал сандар жиынының бірігуі нақты сандар жиынын құрады:

$$R = Q \cup I.$$

Нақты сандар теориясын әртүрлі жолдармен келтіруге болады, мысалы, шексіз ондық бөлшектер арқылы. Сондықтан нақты сандар ұғымын енгізудің жолы маңызды емес, бастысы – нақты сандардың қасиеттері орындалуы.

Төменде нақты сандардың негізгі қасиеттерін беріп, қалған қасиеттерінің шығарылатынын көрсетеміз. Яғни, нақты сандар жиынын аксиомалар арқылы құрамыз. Осы 1–5 қасиеттер орындалатын жиынды нақты сандар жиыны деп атаймыз, ал әрбір элементін нақты сан деп белгілейміз.

1. Қосу амалы

Кез келген екі x және y сандардың қосындысы деп аталатын жалғыз $x + y$ саны анықталады және ол келесі шарттарды қанағаттандырады:

- a) $x + y = y + x$ (қосудың ауыстырымдылығы немесе коммутативтілігі);
- b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (қосудың терімділігі немесе ассоциативтілігі);
- c) Кез келген x саны үшін **нөл** деп аталатын және 0 арқылы белгіленетін сан бар, мұнда

$$x + 0 = x.$$

Салдар. Нақты сандар жиынында жалғыз ғана нөл бар. Егер R жиынында екі нөл 0_1 және 0_2 болса, онда нөлдің анықтамасы бойынша

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2,$$

демек, $0_1 = 0_2$, яғни нөл саны R жиынында жалғыз.

в) Қарама-қарсы сан

Кез келген x саны үшін осы санға **қарама-қарсы** деп аталатын $-x$ саны табылады және

$$x + (-x) = 0$$

теңдігі орындалады.

Салдар. Кез келген нақты санның жалғыз ғана қарама-қарсы саны болады. Егер R жиынында x санына екі қарама-қарсы сан x_1 және x_2 бар болса, яғни

$$x + x_1 = 0 \quad \text{және} \quad x + x_2 = 0,$$

онда

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = x_2 + (x + x_1) = x_2 + 0 = x_2.$$

Мұнда біз нөлдің анықтамасын, қарама-қарсы санның анықтамасын және қосудың терімділігін (ассоциативтілігін) қолдандық.

2. Көбейту амалы

Кез келген екі x және y сандарының көбейтіндісі деп аталатын жалғыз $x \cdot y$ саны анықталады және ол келесі шарттарды қанағаттандырады:

- а) $x \cdot y = y \cdot x$ (**көбейтудің ауыстырымдылығы немесе коммутативтілігі**);
- б) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**көбейтудің терімділігі немесе ассоциативтілігі**);
- с) Кез келген x саны үшін **бір** деп аталатын және 1 арқылы белгіленетін сан бар, мұнда

$$x \cdot 1 = x.$$

Салдар. Нақты сандар жиынында жалғыз ғана бір саны бар. Егер R жиынында екі бір саны 1_1 және 1_2 болса, онда

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2,$$

демек, $1_1 = 1_2$.

в) Кері сан. Кез келген $x \neq 0$ санының **кері** деп аталатын $\frac{1}{x}$ саны табылады және

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Салдар. Кез келген нөлге тең емес нақты санның жалғыз ғана кері саны болады. Егер x санына екі кері сан $\frac{1}{x_1}$ және $\frac{1}{x_2}$ бар болса, яғни

$$x \cdot \frac{1}{x_1} = 1 \quad \text{және} \quad x \cdot \frac{1}{x_2} = 1,$$

онда

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1} \cdot 1 = \frac{1}{x_1} \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x_2}\right) = \left(\frac{1}{x_1} \cdot x\right) \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_2} \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x_1}\right) = \frac{1}{x_2} \cdot 1 = \frac{1}{x_2}.$$

Мұнда біз бірдің анықтамасын, кері санның анықтамасын, көбейтудің терімділігін (ассоциативтілігін), қайтадан кері санның анықтамасын және соңында бірдің анықтамасын қолдандық.

г) Бөлуді анықтау. Егер $y \neq 0$ болса, $x \cdot \frac{1}{y}$ саны x санын y санына **бөлу** деп аталады және оны $x : y$ немесе $\frac{x}{y}$ деп белгілейміз.

3. Қосу мен көбейтудің байланысы: үлестірімділік

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad (\text{көбейтудің үлестірімділігі}).$$

Салдар. Кез келген нақты сан x үшін

$$x \cdot 0 = 0$$

теңдігі орындалады. Шынымен де,

$$x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x \cdot (1 + 0) = x \cdot 1 = x.$$

$x + x \cdot 0 = x$ болғандықтан және нөлдің жалғыз екендігін ескерсек, $x \cdot 0 = 0$ шығады.

4. Сандардың реттілік қасиеті

Кез келген x және y сандары үшін тек біреуін ғана қарастырамыз:

$$x = y, \quad x > y, \quad x < y.$$

Сандардың реттілік қасиеттері келесі шарттарды қанағаттандырады:

а) Егер $x < y$ және $y < z$ болса, онда $x < z$ (**транзитивтік қасиет**);

б) Егер $x < y$ болса, онда кез келген c саны үшін $x + c < y + c$;

с) Егер $x > y$ және $c > 0$ болса, онда $cx > cy$. Егер $c < 0$ болса, онда $cx < cy$.

Архимед принципі. Кез келген $x > 0$ саны үшін натурал n саны табылады, мұнда

$$n > x.$$

5. Сандардың үзілгісіздік қасиеті

Кез келген X және Y сан жиындарының $x \in X$ пен $y \in Y$ элементтері үшін

$$x \leq y$$

теңсіздігі орындалса, онда c саны табылады, ол

$$x \leq c \leq y$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Ескерту: үзілгісіздік қасиет тек нақты сандар жиынында орындалады. Мысалы, рационал сандар жиынында үзілгісіздік қасиет орындалмайды.

Мысалы, X жиыны $x < \sqrt{2}$ теңсіздігін қанағаттандыратын рационал сандар, ал Y жиыны $y > \sqrt{2}$ теңсіздігін қанағаттандыратын рационал сандар болсын. Онда кез келген $x \in X$ пен $y \in Y$ үшін $x \leq y$ теңсіздігі орындалса да, рационал c саны жоқ, себебі $c = \sqrt{2}$ рационал сан емес.

Нақты сандардың дәрежелері

Кез келген нақты сан a және натурал n үшін a санының n дәрежесі n көбейткіштердің көбейтіндісіне тең:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ көбейткіш}}.$$

Анықтама бойынша:

$$a^0 = 1, \quad a > 0, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

Егер m, n бүтін сандар болса, онда:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$a > 0$ және n натурал сан болсын. Егер $b^n = a$, онда b саны a санының n дәрежелі түбірі деп аталады және оны $b = \sqrt[n]{a}$ деп белгілейміз.

Жұп дәрежелі түбірдің екі мәні бар: $b = \pm \sqrt[k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$. $\sqrt[k]{a}$ түбірінің теріс емес мәнін **арифметикалық түбір** деп атайды.

Егер m/n рационал сан болса және $a > 0$, онда:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Түбірдің қасиеттері

$a \geq 0$, $b \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ болсын:

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nm]{a}$;
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
3. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

1 Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] жұмыстардан қарауға болады.

Список литературы

- [1] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М., 1968, 1972, 1956, 1960, 1964, 1957, 2002. 1
- [2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1997, 1990, 1977, 1962, 1998, 1969, 1966, 1958, 1956, 1952, 2002, 2004, 2006, 2005. 1
- [3] Темірғалиев Н. Математикалық анализ. – Алматы, 1991. 1
- [4] Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. – М., 1984, 1981, 1988, 2003. 1
- [5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1982, 1987, 1985, 2004, 2006 1
- [6] Сатығулова С., Исакова А.Қ., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б. 1
- [7] Бурбаки Н. Основные структуры анализа. Книга 1. Теория множеств. – Москва: Мир, 1965. -455 б. 1